

2025 年度工学部入学前学習
スタートアップ講座

数 学

共通教育センター



山陽小野田市立
山口東京理科大学
Sanyo-Onoda City University

目次

1	はじめに	3
2	式と計算	3
2.1	記号の省略と式に関する名前の約束	3
2.2	べきの計算	4
2.3	べきの一般化	5
3	スカラーとベクトル	5
3.1	ベクトルの導入	6
3.2	ベクトルの足し算・引き算・掛け算	6
4	数列と関数	7
4.1	数列	7
4.2	関数	7
4.3	数列の極限	8
4.4	関数の極限と連続	8
4.5	級数	9
4.6	区分求積	9
5	合成関数と逆関数	11
5.1	写像	11
5.2	合成関数と逆関数	11
6	微分と積分	12
6.1	差分と微分	12
6.2	差分・微分と級数・積分	13
6.3	微分と近似	14
6.4	ライプニッツ則	15
6.5	合成関数の微分	16
6.6	積分と原始関数	16
6.7	部分積分と置換積分	17

1 はじめに

この授業では大学で使う数学の基礎部分の重要項目を学習します。復習がメインとなりますが、習っていない内容が含まれている可能性もあります。授業を受ける前にある程度目を通して、分からない部分をあらかじめ把握しておくと思効果的に学べると思います。もう大丈夫だと思っている部分についても、勘違いや思い込みのある場合があるのでひと通りは読んで計算も自分で追ってみてください。

2 式と計算

ここでは数と式について学ぶ。また基本的な四則演算とその際の記述のルールについて学ぶ。

2.1 記号の省略と式に関する名前の約束

数学では記号を省略して簡単にすることが多い。例えば、

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 \quad (2.1)$$

のように掛け算記号を省略する。ここで2の右上の数字3のことを**指数**、または**べき**と呼ぶ。今後は $2 \times x = 2x$ や $2^3 \times 3^2 = 2^3 3^2$ のように掛け算記号は頻繁に省略する。ここで、 $2x$ の2に当たる部分を**係数**と呼ぶ。注意点として、係数は文字以外の部分を表すのではなく、定数部分をまとめて係数と呼ぶ。例えば、

$$y = 3e\pi x \quad (2.2)$$

のような式で x が変数のとき、 $3e\pi$ の部分が係数となる。数字同士の掛け算の場合 2×3 を 23 と書くわけにはいかないので、

$$2 \times 3 = 2 \cdot 3 \quad (2.3)$$

のように点で掛け算を表すこともある。また、この式では x を決めると y もそれに従って決まるので、 x を**独立変数**、 y を**従属変数**と呼ぶ。

次に割り算記号の省略について説明する。割り算の省略のためには分数を使うことと指数を使うことがある。分数を使うと

$$2 \div 3 = \frac{2}{3} \quad (2.4)$$

や

$$(x+2) \div (3x+4) = \frac{x+2}{3x+4} \quad (2.5)$$

のように式を簡略化できる。一方、指数を使う場合には

$$2 \div 3 = 2 \cdot 3^{-1} \quad (2.6)$$

のように割り算記号を避けることが出来る。先ほどの例では

$$(x+2) \div (3x+4) = (x+2)(3x+4)^{-1} \quad (2.7)$$

と表すことが出来る。

2.2 べきの計算

ここではべきを使った計算の説明をしていく。まず最初に掛け算について考える。

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5 \quad (2.8)$$

となる。これは言葉で説明すると2を2回掛けたものと2を3回かけたものの積なので、2を5回掛けたものになることを意味する。これを以下のように指数(何回掛けたか)の和になると考えることによって以下のよう

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5. \quad (2.9)$$

さらに割り算について考える。具体例で考えると

$$2^5 \div 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \div (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^2 \quad (2.10)$$

となる。つまり、2を5回掛けたものを2を3回掛けたもので割るので2を2回掛けたものが残る。これは

$$2^5 \div 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 \quad (2.11)$$

と書くことが出来る。また、 2^3 で割ることを 2^{-3} の掛け算として現したことを思い出すと

$$2^5 \div 2^3 = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 \quad (2.12)$$

のように計算出来る。以上から一般的に以下が成り立つ。

べきで表した数と積

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (2.13)$$

次に足し算を考える。これも具体例で考えると

$$2^5 + 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) + (2 \cdot 2 \cdot 2) \quad (2.14)$$

$$= 4(2 \cdot 2 \cdot 2) + (2 \cdot 2 \cdot 2) = 5(2 \cdot 2 \cdot 2) = 5 \cdot 2^3 \quad (2.15)$$

となる。この計算も指数で書き直すと

$$2^5 + 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 + 2^3 = (2^2 + 1) \cdot 2^3 = 5 \cdot 2^3 \quad (2.16)$$

と計算出来る。以上から一般的に以下のような計算が出来る。

べきで表した数の和

$$a^m + a^n = a^{m-n} a^n + a^n = (a^{m-n} + 1) a^n. \quad (2.17)$$

最後にべきで表した数のべき乗を考える。例えば

$$(2^2)^3 = (2 \cdot 2)^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2^6 \quad (2.18)$$

となるが、これは言葉で説明すると、 2^2 を3回掛けることであるから、

$$(2^2)^3 = 2^2 2^2 2^2 = 2^{2 \times 3} = 2^6 \quad (2.19)$$

となる。したがって、以下のルールが得られる。

べきで表した数の和

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m = a^{m \cdot n}. \quad (2.20)$$

2.3 べきの一般化

ここでは整数ではないべきの場合も含むようにこれまでの話を一般化する。式 (2.13) や (2.26) のルールを分数についても成り立つようにする。まず、式 (2.26) が成り立つためには

$$(2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{\frac{1}{2} \times 2} = 2^1 = 2 \quad (2.21)$$

となる必要がある。このとき、式 (2.13) も同時に成り立つ。

$$(2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2^1 = 2. \quad (2.22)$$

したがって、 $2^{\frac{1}{2}}$ は 2 回掛けると 2 になる数とすべきである。この数は

$$x^2 = 2 \quad (2.23)$$

の解のうち正のものであるから、 $\sqrt{2}$ である。つまり、以下のように約束する。

平方根のべき乗による表現

$a > 0$ に対して、 $\frac{1}{2}$ 乗を平方根とする。

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}. \quad (2.24)$$

ここまでの議論を繰り返し、以下のように約束する。

累乗根のべき乗による表現

$a > 0$ に対して、 n を自然数としたとき、 $\frac{1}{n}$ 乗を n 乗根とする。

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}. \quad (2.25)$$

以上から、任意の有理数 $\frac{m}{n}$ に関して $\frac{m}{n}$ 乗を定義することが出来る。

任意の有理数べき乗

$a > 0$ に対して、 m, n を共に自然数としたとき、

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \text{ となる。} \quad (2.26)$$

任意の自然数は有理数でいくらでも近く近似できるため、 $a > 0$ に対して無理数 x に対する a^x も定義することが出来る。

3 スカラーとベクトル

ここでは変化量を表すのに便利な概念であるベクトルについて学ぶ。特に加法と減法と乗法について学ぶ。

3.1 ベクトルの導入

数字の組みをまとめてひとつの対象としてベクトルと呼ぶ。その表記方法は分野によって違っていたり、同じ分野でも人によって使う記号が違ったりする。例えば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, (1\ 2), [1\ 2], \dots \quad (3.1)$$

などのように記述する。以下簡単のために一番左の記法を使っていく。ベクトルの数字の個数もベクトルを特徴づける性質であり、上の例では2成分を持つベクトルとなっている。ベクトルは矢印で表現されることもあり、その場合1つ目の成分を x 方向の変化量、2つ目の成分を y 方向の変化量、3つ目の成分を z 方向の変化量とみなすことが多いので、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

の a, b, c を第一成分、第二成分、第三成分と呼ぶ代わりに x 成分、 y 成分、 z 成分と呼ぶこともある。1成分のベクトルの場合、 (1) と書くべきであるが、あまりこのようなベクトルを扱うことはない。ベクトルとただの数字を区別するためにあえてただの数字をスカラーと呼ぶことがある。

3.2 ベクトルの足し算・引き算・掛け算

以下がベクトルに対する足し算と引き算である。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm c \\ b \pm d \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

ここで、サイズの異なるベクトルは足し算や引き算が定義できないことに注意が必要である。つまり、以下の左辺から右辺に変形は出来ない。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a \pm d \\ b \pm e \\ c \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

また、通常このような計算が出てきてしまった場合はそこに至るまでになんらかの誤りがあると考えた方がよい。

次に掛け算を考えたいが、ベクトルの掛け算には数種類あり、特に頻出なものとして内積と外積がある(他にもクロネッカー積などがあるので興味がある人は調べてみてください)。内積はベクトルからスカラーを出す演算で、各成分毎の掛け算をしてそれを全部足す演算である。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2. \quad (3.5)$$

この計算から分かるように内積は成分数がいくつであっても2つのベクトルの成分数がそろっていれば実行可能である。一方、外積は成分数が3の場合のみ定義可能であり、以下の計算を行う。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ c_1 a_2 - a_2 c_1 \\ a_1 b_2 - b_2 a_1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

これから分かるようにベクトル同士の外積は再びベクトルとなる。直交しているベクトルの内積は 0, 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の外積は $\vec{a}, \vec{b}$ のどちらにも直交することなどが示せる (板書で説明します)。

以上のようにベクトルの “積” といった場合、いくつかの種類があるのでどの積であるかを指定しなければいけない。そのため、ベクトルの内積には $\cdot$, 外積には $\times$ を必ずつける必要がある。

4 数列と関数

ここでは番号で特徴付けられる数字の列である数列とその実数への拡張として関数について学ぶ。また、その延長として無限に続く数列の極限、関数の極限などの概念を学んでいく。

4.1 数列

数字を順番に並べたものを**数列**と呼ぶ。例えば、

$$1, 3, 5, 2, 3, \dots, \quad (4.1)$$

のような数字の並びがあったとき、 n 番目の数字を a_n と書くことにすると

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 2, a_5 = 3, \dots, \quad (4.2)$$

となる。以下、自然数 n と数の対応 $n \rightarrow a_n$ を考えていく。考える数字の個数が有限個の場合は有限数列、無限個の場合は無限数列と呼ぶ。また、上の例では a_n も自然数となっていたが、以下の $b_1, b_2, \dots$ のように有理数、無理数、複素数など何を対象にしても良い。

$$b_1 = 1, b_2 = 2^{-1}, b_3 = 2^{-2}, \dots, b_n = 2^{-(n-1)}, \dots \quad (4.3)$$

ここで、この例のようにあらゆる自然数 n に対して $b_n = 2^{-(n-1)}$ の対応で与えられる数列に対して、 $b_n = 2^{-(n-1)}$ を**一般項**と呼ぶ。

4.2 関数

数列では自然数 n に対して 1 つの数字 a_n が決まっていた。これは自然数 n を数列 a_n で決まる別の数へ移す**写像**とみなすことが出来る。この数列の順番に対応する自然数の部分を実数に拡張したものを**関数**と呼ぶ。数列の時は a_n のように番号 n を下付きの文字で表したが、関数では写像で移される側を括弧内の文字で表し、 $f(x)$ のように書く。

関数について、数列の番号に対応する部分を指定する領域、つまり x の属する領域を**定義域**、関数 f が取り得る値の範囲を**値域**と呼ぶ。数列のときと同様に関数の場合も定義域内のひとつの x に対して必ずひとつの数 $f(x)$ が対応していないといけな。一般には関数の定義域も地域も複素数に取ることも出来る。

例えば、以下の関数を定義域 $x \in [0, 1]$ で考える。

$$f(x) = 2x + 1. \quad (4.4)$$

このとき、値域は $[1, 3]$ となる。

4.3 数列の極限

無限数列で一般項が与えられている場合、 n を無限に大きくした極限の振る舞いで大きく分けて 3 通りに分類出来る。まず、

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2^2}, \dots, a_n = \frac{1}{2^n}, \dots \quad (4.5)$$

のような場合や

$$a_1 = 1 + \frac{1}{10}, a_2 = 1 + \frac{1}{10^2}, \dots, a_n = 1 + \frac{1}{10^n}, \dots \quad (4.6)$$

のような場合、 n を大きくしていくとそれぞれ 0 と 1 に近付いていく。このように n を大きくしていったとき、ある有限の値にいくらでも近くなっていく場合、数列は**収束する**という。

また、

$$a_1 = -1 + \frac{1}{10}, a_2 = 1 + \frac{1}{10^2}, \dots, a_n = (-1)^n + \frac{1}{10^n}, \dots \quad (4.7)$$

のような場合、 n を大きくしていても -1 と 1 の間でずっと振動し続ける。このような場合、数列は**振動する**という。

最後に、

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \dots, a_n = n, \dots \quad (4.8)$$

のように n を大きくしたときにいくらでも大きくなっていく場合、数列は**発散する**という。

$$a_1 = -2, a_2 = -2^2, a_3 = -2^3, \dots, a_n = -2^n, \dots \quad (4.9)$$

のようにいくらでも絶対値が大きい負の数になっていく場合も数列は発散するという。

4.4 関数の極限と連続

関数についても極限における値について分類が出来る。ここで、数列との違いとして、関数では例えば実数から実数への写像を考えたりするため、無限の数列を任意の場所で取ることが出来る。例えば、 $x = 1 + \frac{1}{n}$ の関数の値 $a_n = f(1 + \frac{1}{n})$ を考え、 n を大きくしていくと、

$$a_1 = f(1 + 1), a_2 = f\left(1 + \frac{1}{2}\right), a_3 = f\left(1 + \frac{1}{3}\right), \dots, \quad (4.10)$$

という数列を構成する事が出来る。この振る舞いで関数の $x \rightarrow 1 + 0$ の振る舞いを調べる事が出来る。ここで、 $x \rightarrow 1 + 0$ は x を 1 を 1 より大きい側から 1 に無限に近付けていく操作を表す。この数列の $n \rightarrow \infty$ で行き着く先を

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \quad (4.11)$$

と書く。同様に例えば、 $x = 1 - \frac{1}{10^n}$ の関数の値 $b_n = f(1 - \frac{1}{10^n})$ を考え、 n を大きくしていくと、

$$b_1 = f\left(1 - \frac{1}{10}\right), b_2 = f\left(1 - \frac{1}{100}\right), b_3 = f\left(1 - \frac{1}{1000}\right), \dots, \quad (4.12)$$

という数列を構成する事が出来る。この数列の $n \rightarrow \infty$ で行き着く先を

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \quad (4.13)$$

と書く。

具体例として $f(x) = \frac{1}{1-x}$ を考える。このとき、

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \frac{1}{1-(2+0)} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \frac{1}{1-(2-0)} = -1 \quad (4.14)$$

となり、また $f(2) = -1$ となる。一方、 $x \rightarrow 1 \pm 0$ を考えると

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \frac{1}{1-(1+0)} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \frac{1}{1-(1-0)} = \infty \quad (4.15)$$

となる。これは例えば、 $b_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ を考えると

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{10^n})} \Big|_{n \rightarrow \infty} = 10^n \Big|_{n \rightarrow \infty} = \infty \quad (4.16)$$

のように示す事が出来る。つまり、関数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ は $x = 1$ の左側では ∞ に発散しており、 $x = 1$ の左側では $-\infty$ に発散している。また、 $f(1)$ は $\frac{1}{0}$ となってしまうため定義できない。つまり、 $f(x)$ は $x = 1$ で途切れている。

上で出てきたような途切れの生じない部分で関数は**連続である**という。一方、上の例での $x = 1$ の1点のように関数が左側から近付けた場合と右側から近付けた場合と関数のその1点での値の1つでも一致しない場合には関数は**不連続である**という。

4.5 級数

数列 a_n に対して、その和を**級数**と呼ぶ。ここで、和は全ての数列の要素に対して行う。したがって、有限数列では全要素を足し上げるだけとなる。例えば、 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$ とすると、級数は $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$ となる。一方、無限数列の場合は無限の和を捉えるために以下の手順の極限を考える。まず、途中までで和を止めたものを考える。これらを**部分和**と呼ぶ。

$$S_1 = a_1, \quad (4.17)$$

$$S_2 = a_1 + a_2, \quad (4.18)$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad (4.19)$$

$$\vdots \quad (4.20)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \quad (4.21)$$

この n を無限に大きくしていく極限として級数を定義する。

級数と部分和

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (4.22)$$

4.6 区分求積

関数 $f(x)$ についても数列の級数に対応するものを定義していく。この場合、 $f(x)$ を全ての x で足していく、という操作を行うことは難しい。これは x が実数であり、飛び飛びの値を持たないことに由来する。した

がって、一旦 x を飛び飛びの値として扱ってその極限を考える。例として定義域 $[1, 2]$ の関数 $f(x)$ を考える。この定義域を飛び飛びの値に変えていく。具体的には $x = 1$, $x = 1 + \frac{1}{3}$, $x = 1 + \frac{2}{3}$ の点での関数の値を足していく (図は板書します)。

$$f(1) + f\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{2}{3}\right). \quad (4.23)$$

これをさらに細かくすると

$$f(1) + f\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{2}{4}\right) + f\left(1 + \frac{3}{4}\right) \quad (4.24)$$

となる。単純に足す点を増やしていくと無限個の和が生じるため、連続関数であるとほぼ確実に発散が生じてしまう。それを回避するために足した個数で割っていく。つまり、

$$I_3 = \frac{1}{3} \left[f(1) + f\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{2}{3}\right) \right], \quad (4.25)$$

$$I_4 = \frac{1}{4} \left[f(1) + f\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{2}{4}\right) + f\left(1 + \frac{3}{4}\right) \right] \quad (4.26)$$

$$\dots \quad (4.27)$$

$$I_n = \frac{1}{n} \left[f(1) + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \right] \quad (4.28)$$

のような量を考えていく。この操作の n を大きくしていく極限は実は関数の面積を求めることに対応している (図は板書します)。

以上より、以下の方法で関数の面積を求める事が出来る。この方法を**区分級積法**と呼ぶ。

区分級積法

関数 $f(x)$ と x 軸が区間 $[a, b]$ でなす図形の面積は以下で与えられる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left[f(a) + f\left(a + \frac{(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right) \right]. \quad (4.29)$$

区分求積で $\frac{b-a}{n} = \Delta x$ とすると、以下のように書き直すことが出来る。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_m \Delta x f(a + (b-a)m\Delta x). \quad (4.30)$$

この極限操作を**積分**と呼び、以下のような記号で書く。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_m \Delta x f(a + (b-a)m\Delta x). \quad (4.31)$$

積分

関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの積分は以下で与えられる。

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{m=0}^{(\Delta x)^{-1}-1} \Delta x f(a + (b-a)m\Delta x). \quad (4.32)$$

5 合成関数と逆関数

ここでは関数を写像として捉え、合成関数、逆関数などについて学んでいく。

5.1 写像

すでに写像の話は出てきたがもう一度写像についてまとめる。実数 x に対する実数関数 $f(x)$ を考える。このとき、 $f(x)$ は各 x に $f(x)$ を対応付けるルールとなっている。したがって、

$$f: x \rightarrow f(x) \quad (5.1)$$

のように f を実数から実数に移す**写像**と捉える事が出来る。同様に実数値をとる数列は

$$a: n \rightarrow a_n \quad (5.2)$$

という自然数から実数への写像とみなす事が出来る。

ここで、数列の例で分かるように写像される集合と写像で移った先の集合は自然数と実数のように異なる集合でも良い。後々のために写像を分類しておく。まず、例として $x \in \{1, -1\}$ と $f(x) \in \{1\}$ の間の対応 $f: x \rightarrow x^2$ は $f(x)$ の属する集合の全ての要素に対して対応する x が存在するため**全射**と呼ばれる。他の例として $x \in \{1, -1\}$ と $g(x) \in \{2, -2, 3\}$ の間の対応 $g: x \rightarrow 2x$ は全射ではないが、あらゆる x が異なる $f(x)$ の値を与えるため**単射**と呼ばれる。したがって、 $x \in \{1, 2, 3\}$ と $h(x) \in \{3, 6, 9\}$ の間の対応 $h: x \rightarrow 3x$ は全射かつ単射であるから**全単射**と呼ばれる。最後に、 $x \in \{-1, 1, 2\}$ と $m(x) \in \{1, 4, 6\}$ の間の対応 $m: x \rightarrow x^2$ は全射でも単射でもない。

5.2 合成関数と逆関数

実数を実数に写像することによって得られる関数に対しては写像後も実数であるため、さらにその写像を考える事が出来る。

$$f: x \rightarrow f(x), \quad (5.3)$$

$$g: f(x) \rightarrow g(f(x)). \quad (5.4)$$

これをさらに以下のように考える。

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)). \quad (5.5)$$

この操作で得られる関数を**合成関数**と呼ぶ。

$$x \xrightarrow{g \circ f} g \circ f(x) = g(f(x)). \quad (5.6)$$

これでは抽象的すぎるため、具体例を示す。例えば、 $f(x) = x + 1$, $g(y) = \frac{1}{y}$ を考えると

$$g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x+1} \quad (5.7)$$

となる。

写像 f との合成写像が以下を満たす写像 g を**逆写像**と呼ぶ。

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = x. \quad (5.8)$$

つまり、

$$x \xrightarrow{g \circ f} x. \quad (5.9)$$

を満たす g を f の逆写像と呼ぶ。この意味としては、 f は x をある違う実数に移す操作であるが、 g はその操作を打ち消すものとなっている。この“逆”という部分を明示するため、写像 f の逆写像を f^{-1} と表すこともある。

実際に逆関数を求める方法のひとつは以下の性質を用いる方法である。

$$y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x. \quad (5.10)$$

これは、 $y = f(x)$ の関係で対応する x と y に対して、逆関数は $x = f^{-1}(y)$ を満たす。つまり、 $y = f(x)$ の関係をグラフで表したとき、 x 軸と y 軸を交換して得られるグラフは逆関数のグラフとなっているということである (詳しくは板書します)。

関数と逆関数のグラフ

$y = f(x)$ の関係をグラフで表したとき、 x 軸と y 軸を交換して得られるグラフは逆関数 f^{-1} のグラフとなる。

6 微分と積分

この節ではこれまでに学んできた極限の概念を用いて微分、積分を学んでいく。

6.1 差分と微分

まず、写像の変化がどれくらいの大きさであるかを考えるために数列を考える。例えば、

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \dots, a_n = n, \dots \quad (6.1)$$

という数列に対して、

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-1} \quad (6.2)$$

という量を $n \geq 2$ について定義すると $\Delta a_n = 1$ となる。この Δa_n を**差分**と呼ぶ。別の例として、

$$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 6, \dots, b_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n, \dots \quad (6.3)$$

を考えるとその差分は

$$\Delta b_n = b_n - b_{n-1} = n \quad (6.4)$$

となる。また、さらに別の例として

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2^2}, c_3 = \frac{1}{2^3}, \dots, c_n = \frac{1}{2^n}, \dots \quad (6.5)$$

を考えるとその差分は

$$\Delta c_n = c_n - c_{n-1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \quad (6.6)$$

となる。上の3つの例で分かるように差分によってその変化の度合いを調べる事が出来る。1つ目の例では変化量は常に1であり、2つ目の例ではどんどん変化が大きくなっていく。一方、3つ目の例では変化量がどんどん小さくなっていく。

関数についても変化の度合いを測る量を定義したい。この場合も区分数積のときと同様に実数で隣の数というものを考える事が難しいため、少し離れた点との差 $\Delta f(x)$ を考える。

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-a). \quad (6.7)$$

この量の a を0に近付ける極限が“隣”との差になりそうであるが、ほとんどの場合この量は0となってしまう。したがって、区分数積法のときの逆で、

$$n\Delta f(x) = n \left[f(x) - f\left(x - \frac{1}{n}\right) \right] \quad (6.8)$$

のように差分に n を掛けたものの $n \rightarrow \infty$ での振る舞いを考える。これは $\Delta x = n^{-1}$ とすると

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} [f(x) - f(x - \Delta x)] \quad (6.9)$$

の $\Delta x \rightarrow 0$ を考えることと同じである。これは関数を直線近似した時の傾きに対応する (詳しくは板書にて)。この操作の極限を取る事が出来る場合、得られる関数を関数 $f(x)$ の導関数と呼び、 $\frac{df}{dx}$ と書く。

導関数

関数 $f(x)$ に対して、以下の極限が定義出来るとき、得られる関数を**導関数**と呼び、 $\frac{df}{dx}$ で表す。

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [f(x) - f(x - \Delta x)]. \quad (6.10)$$

また、ある関数からその導関数を求める操作のことを**微分**と呼ぶ。

6.2 差分・微分と級数・積分

行列の差分

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-1} \quad (6.11)$$

に対して、以下の級数を考える。

$$\Delta a_2 + \Delta a_3 + \Delta a_4 + \cdots + \Delta a_N = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \cdots + a_N - a_{N-1}. \quad (6.12)$$

この右辺はほとんどの項が打ち消しあって

$$\Delta a_2 + \Delta a_3 + \Delta a_4 + \cdots + \Delta a_N = a_N - a_1. \quad (6.13)$$

となる。

逆に行列 a_n の部分和

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (6.14)$$

に対して差分を考えると

$$\Delta s_n = s_n - s_{n-1} = a_n \quad (6.15)$$

となる。

つまり、数列の差分の n までの部分和は (a_1 を引くことを除いて) 数列 a_n に一致し、数列の n までの部分
和の差分は a_n に一致する。したがって、差分と部分和は逆操作となっている。

以下、差分と微分の関係思い出しながら、微分の逆操作について考える。まず、微分は以下の差分の
 $n \rightarrow \infty$ の極限によって定義した。

$$n\Delta f(x) = n \left[f(x) - f\left(x - \frac{1}{n}\right) \right] \rightarrow \frac{df(x)}{dx}. \quad (6.16)$$

この関数 $n\Delta f(x)$ の a から x までの区分求積を行うと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left[n\Delta f(a) + n\Delta f\left(a + \frac{x-a}{n}\right) + n\Delta f\left(a + \frac{2(x-a)}{n}\right) + \cdots + n\Delta f\left(a + \frac{(n-1)(x-a)}{n}\right) \right] \\ &= f\left(a + \frac{(n-1)(x-a)}{n}\right) - f(a) \end{aligned} \quad (6.17)$$

となるが、この右辺は $n \rightarrow \infty$ の極限で $f(x) - f(a)$ となる。よって、 $n \rightarrow \infty$ の極限で以下が得られる。

$$\int_a^x dx \frac{df(x)}{dx} = f(x) - f(a) \quad (6.18)$$

また、関数 f の区分求積で行った以下の部分和を考える。

$$I_n = \frac{1}{n} \left[f(a) + f\left(a + \frac{(x-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{2(x-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(n-1)(x-a)}{n}\right) \right]. \quad (6.19)$$

これに対して差分を考え、微分を求めると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\Delta I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(I_n - I_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(a + \frac{(n-1)(x-a)}{n}\right) = f(x) \quad (6.20)$$

となる。したがって、 $n \rightarrow \infty$ の極限で以下が得られる。

$$\frac{d}{dx} \int_a^x dx f(x) = f(x). \quad (6.21)$$

以上から分かるように積分と微分は逆操作の関係にある。ただし、 f の導関数の積分を行う場合、定数 $f(a)$
だけずれたものとなる。つまり、導関数を積分して元の関数 $f(x)$ を求める際には定数分のズレを補正するた
めに $f(a)$ の値が必要となる。

6.3 微分と近似

微分は差分からの極限操作として定義されたが、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取らなくても、 Δx が非常に小さければ
近似的に以下が成り立つはずである。

$$\frac{df}{dx} \simeq \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} [f(x) - f(x - \Delta x)]. \quad (6.22)$$

したがって以下が成り立つ。

導関数による関数の差の近似

関数 $f(x)$ と $f(x - \Delta x)$ の差は Δx が非常に小さければ導関数で与えられる。

$$f(x) \simeq f(x - \Delta x) + \frac{df}{dx} \Delta x. \quad (6.23)$$

これは $x \rightarrow x + \Delta x$ とすることによって以下のように書き直す事もできる。

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x. \quad (6.24)$$

この関係式は関数 $f(x)$ に傾き $\frac{df}{dx}$ で与えられる直線を加えると f の $x + \Delta x$ での値が得られることを意味している。したがって、 $f(a)$ からスタートしてこの近似を繰り返していくと

$$\begin{aligned} f(a + \Delta x) &\simeq f(a) + \frac{df(a)}{dx} \Delta x, \\ f(a + 2\Delta x) &\simeq f(a + \Delta x) + \frac{df(a + \Delta x)}{dx} \Delta x, \\ f(a + 3\Delta x) &\simeq f(a + 2\Delta x) + \frac{df(a + 2\Delta x)}{dx} \Delta x, \\ &\vdots \\ f(x) &\simeq f(x - \Delta x) + \frac{df(x - \Delta x)}{dx} \Delta x, \end{aligned} \quad (6.25)$$

となるため、以下を示すことが出来る。

$$f(x) \simeq f(a) + \frac{df(a)}{dx} \Delta x + \frac{df(a + \Delta x)}{dx} \Delta x + \cdots + \frac{df(x - \Delta x)}{dx} \Delta x. \quad (6.26)$$

これは $\Delta x \rightarrow 0$ の極限で完全に一致するはずであり、その極限で右辺の二項目以降は積分となるため

$$f(x) = f(a) + \int_a^x dx \frac{df(x)}{dx}. \quad (6.27)$$

となる。これは

$$\int_a^x dx \frac{df(x)}{dx} = f(x) - f(a) \quad (6.28)$$

となることを表しており、前節の結果の別の導出方法となっている。

6.4 ライプニッツ則

関数を近似する方法の応用としてライプニッツ則を示すことが出来る。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ に対して、 $x + \Delta x$ にしたときの変化を考える。このとき、

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) &\simeq \left[f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x \right] \left[g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \Delta x \right] \\ &= f(x)g(x) + \Delta x \left[\frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right] + (\Delta x)^2 \frac{df(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx} \end{aligned} \quad (6.29)$$

となるため、 $h(x) = f(x)g(x)$ としたとき、 $h(x)$ の導関数は

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx} + \Delta x \frac{df(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx} \right] \\ &= \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}\end{aligned}\quad (6.30)$$

となる。つまり、

—— ライプニッツ則 ——

関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ の導関数は以下で計算できる。

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}. \quad (6.31)$$

同様に

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2} \frac{d}{dx} f(x) \quad (6.32)$$

や、これと積の微分を組み合わせることによって

$$\frac{d}{dx} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)^2} \left[f(x) \frac{d}{dx} g(x) - g(x) \frac{d}{dx} f(x) \right] \quad (6.33)$$

なども示すことが出来る。

6.5 合成関数の微分

合成関数 $f(g(x))$ の微分について、以下が成り立つことを示すことが出来る (説明は板書で)。

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{dg}{dx} \frac{df}{dg}. \quad (6.34)$$

これを用いることによって様々な関数の微分を計算することが出来る。

6.6 積分と原始関数

ここでは積分と微分が逆操作であることに注目して、いくつかの関数の積分について見ていく。まず、積分と微分が逆操作であるから以下が言える。

—— 積分して得られた関数の微分 ——

ある関数 $f(x)$ を積分して得られる関数 $F(x)$ に対して、以下が成り立つ。

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x). \quad (6.35)$$

ここで現れた関数 $F(x)$ は**原始関数**と呼ばれる。同様に以下も言える。

導関数の積分

関数 $F(x)$ を微分して得られる関数 $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ に対して、以下が成り立つ。

$$\int^x dx f(x) = F(x) + \text{定数}. \quad (6.36)$$

したがって、積分を求めたいとき、以下の作業をすれば良い。

積分の計算方法

- 微分すると $f(x)$ になるような関数 $F(x)$ を見つける。
- 得られた関数 $F(x)$ に定数を足す。
- 定数が決められる場合は決める。

6.7 部分積分と置換積分

ライプニッツ則の両辺を積分すると以下が得られる。

$$f(x)g(x) + C = \int \frac{df(x)}{dx} g(x) dx + \int \frac{dg(x)}{dx} f(x) dx. \quad (6.37)$$

これを用いることによって積分の計算が可能なケースもある。この手法を**部分積分**と呼ぶ。また、合成関数の微分の両辺を積分することによって

$$f(g(x)) + C = \int \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx} dx = \int \frac{df(g)}{dg} dg \quad (6.38)$$

を示すことが出来る。この手法を**置換積分**と呼ぶ。