

解答例

(1) 因数分解についての理解を問う。

$$\begin{aligned} & x^2 + 5xy + 6y^2 + 5x + 13y + 6 \\ &= x^2 + (5y+5)x + (6y^2 + 13y + 6) \\ &= x^2 + (5y+5)x + (3y+2)(2y+3) \\ &= (x+3y+2)(x+2y+3) \end{aligned}$$

(2) 3次式の展開について公式の理解を問う。

$$\begin{aligned} & (x-3a)(x^2+3ax+9a^2) \\ &= x^3 - 27a^3 \end{aligned}$$

(3) グラフの平行移動について理解を問う。

$y=3x^2$ のグラフの頂点は(0,0)であるから、グラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に -3 だけ平行移動する。よって $y=3(x-1)^2-3$

(4) 連立不等式の解法についての理解を問う。

$$\begin{aligned} & 0.05x - 0.11 \geq 0.35x + 0.79 \text{ より,} \\ & -0.3x \geq 0.9 \\ & x \leq -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -0.31 \geq 0.05x - 0.11 \text{ より,} \\ & -0.2 \geq 0.05x \\ & x \leq -4 \\ & \text{よって } x \leq -4 \end{aligned}$$

(5) 正弦定理についての理解を問う。

$BC = a$, $AC = b$ とすると, 正弦定理より,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{だから}$$

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$$

$$a = 2\sqrt{6} \times \frac{1}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ = 2\sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

(6) 集合の概念についての理解を問う。

$$\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B} = \{1, 6, 8, 9\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\} \text{ より, } B = \{3, 4, 5\}$$

(7) 命題と条件に関する概念の理解を問う。

解答例 1

$x = 5$ であれば $x^2 = 25$ であるが, $x^2 = 25$ だからといって $x = 5$ とは限らない。

$x = -5$ かもしれない。

解答例 2

「 $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$ 」は真

「 $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ 」は偽 (反例 $x = -5$)

よって, $x^2 = 25$ は $x = 5$ の必要条件であるが, 十分条件ではない。

(8) 余弦定理についての理解を問う。

$AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ として, 余弦定理より,

$$\cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ < \angle C < 180^\circ$ であるから,

$$\angle C = 120^\circ$$

(9) 三角比の応用に関する力を問う。

$$\text{標高差} : 3 \times \sin 28^\circ = 3 \times 0.4695 = 1.4085 \cong 1.41 \text{ km}$$

$$\text{水平距離} : 3 \times \cos 28^\circ = 3 \times 0.8829 = 2.6487 \cong 2.65 \text{ km}$$

(10) データの分散と標準偏差に関する理解を問う。

$$\text{平均値} : 2 \times 35 + 10 = 80,$$

$$\text{分散} : 2^2 \times 5^2 = 100,$$

$$\text{標準偏差} : 2 \times 5 = 10$$

(11) 「式と証明」からの出題で二項定理を使い係数を求めさせる。

$${}_5C_r x^{5-r} (-3y)^r = {}_5C_r (-3)^r x^{5-r} y^r$$

$x^3 y^2$ の項は, $r = 2$ のときである。

求める係数は

$${}_5C_2 (-3)^2 = 10 \cdot 9 = 90$$

(12) 「複素数と方程式」からの出題で解と係数の関係を使い求めさせる。

分数式の計算の理解も試す。

解と係数の関係から, $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = 3$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{6^2 - 2 \cdot 3}{3} = 10$$

(13) 「複素数と方程式」からの出題で高次方程式の解法と虚数解の理解を試す。

$$1+i \text{ が解であるから } (1+i)^3 + a(1+i)^2 + b(1+i) + 4 = 0$$

$$\text{整理して} \quad (2a+b+2)i + b + 2 = 0$$

$$a, b \text{ は実数より, } a = 0, b = -2$$

$$\text{このとき方程式は } x^3 - 2x + 4 = 0$$

$$P(x) = x^3 - 2x + 4 \text{ とすると } P(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 4 = 0$$

$$P(x) \text{ は } x+2 \text{ を因数にもち, } P(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 2)$$

$$\text{したがって, 他の解は } 1-i, -2$$

(14) 「図形と方程式」からの出題で直線の方程式と2直線の関係の理解を試す。

点 B の座標を (p, q) ($p \neq 0$) とする。

直線 ℓ の傾きは $\frac{1}{2}$, 直線 AB の傾きは $\frac{q-2}{p}$

AB $\perp$ ℓ より

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q-2}{p} = -1$$

すなわち

$$2p + q - 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

線分 AB の中点 $\left(\frac{p}{2}, \frac{q+2}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{p}{2} - 2 \cdot \frac{q+2}{2} - 1 = 0$$

したがって

$$p - 2q - 6 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より $p = 2, q = -2$ 点 B の座標は $(2, -2)$

(15) 「図形と方程式」からの出題で円と直線の位置関係の理解を試す。

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5 \text{ と } y = 2x + m \text{ から } y \text{ を消去して整理すると}$$

$$5x^2 + 4mx + m^2 - 2m = 0 \cdots \textcircled{3}$$

③の判別式を D とすると, $D \geq 0$ であるから,

$$D = (4m)^2 - 4 \times 5 \times (m^2 - 2m) = -4(m^2 - 10m) = -4m(m - 10) \geq 0$$

これを解くと $0 \leq m \leq 10$

(16) 加法定理の応用 | $\cos$ の 2 倍角の式に関する知識を問う。

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 \text{ より,}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$$

(17) 指数関数を含む方程式 | 指数について底の変換に対する理解力を踏まえ,

指数関数を含む方程式の解が求められるかを問う。

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 \text{ であるから, } (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$2^x = t \text{ とおくと, } t > 0 \text{ であり,}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$t > 0 \text{ より, } t = 1, 2$$

$$\text{ゆえに, } 2^x = 1 \text{ すなわち } x = 0$$

$$2^x = 2 \text{ すなわち } x = 1$$

$$\text{よって, } x = 0, 1$$

(18) 対数関数を含む方程式 | 対数について基本的な底の変換及び真数条件に対する

理解力を踏まえ、対数関数を含む方程式の解が求められるかを問う。

真数は正であるから、 $x > 0$ かつ $x - 2 > 0$ より $x > 2$

対数の底を 2 にそろえると、 $\frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 (x - 2)$

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 2^2} = \log_2 (x - 2)$$

$$\frac{\log_2 x}{2 \log_2 2} = \log_2 (x - 2)$$

$$\log_2 2 = 1 \text{ より, } \frac{1}{2} \log_2 x = \log_2 (x - 2)$$

両辺を 2 倍すると、 $\log_2 x = 2 \log_2 (x - 2)$

$$\log_2 x = \log_2 (x - 2)^2$$

真数を比較して、 $x = (x - 2)^2$

これを整理すると、 $x^2 - 5x + 4 = 0$

すなわち、 $(x - 1)(x - 4) = 0$

$x > 2$ であるから、 $x = 4$

(19) 微分 | 曲線上の点における接線の方程式が求められるかを問う。

$y = 3x^2$ を微分すると $y' = 6x$

したがって、接線の方程式は、

$$y = 6 \cdot 1 \cdot (x - 1) + 3$$

$$y = 6x - 3$$

(20) 定積分 | 絶対値を含んだ式の解釈と定積分の基礎的な計算力を問う。

$$\int_{-2}^1 |x^2 - 1| dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1) - \left\{ \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2) \right\} - \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1 - \left\{ -\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) \right\}$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{8}{3} + 2 \right) - \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$= \frac{8}{3}$$

