解答例

（１）根号を含む式の計算の理解を問う。

$$x+y=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=10\text{，}\quad xy=1$$

したがって，

$$x^2+y^2=\left(x+y\right)^2-2xy=98$$

（２）１次不等式の計算の理解を問う。

$-14x+8<-21x+13$ より， $x<\dfrac{5}{7}$

$-21x+13<-18x+11$ より， $\dfrac{2}{3}<x$

したがって，

$$\frac{2}{3}<x<\frac{5}{7}$$

（３）集合の理解を問う。

$$\overline{A\cup\overline{B}}=\overline{A}\cap\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cap B=\{1,3,5,7,9,11\}\cap\{3,6,9,12\}=\{3,9\}$$

（４）命題と証明の理解を問う。

逆：真

「$0<x$　かつ　$y<0$」$\Rightarrow$ $xy<0$

対偶：偽

「$0\geqq x$ または　$y\geqq 0$」$\Rightarrow$ $xy\geqq 0$

（反例） $x=-2,\ y=2$

裏：真

$xy\geqq 0$　$\Rightarrow$　「$0\geqq x$ または　$y\geqq 0$」

（５） ２次関数の平方完成と最大値について理解を問う。

$$y=-\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\frac{m^2}{4}+1$$

は $x=\frac{m}{2}$ のとき最大値 $\frac{m^2}{4}+1$ をとる。問題文から，

$$\frac{m}{2}=-1$$

より， $m=-2$ である。このときの最大値は，

$$\frac{(-2)^2}{4}+1=2$$

（６） ２次不等式について理解を問う。

$$x(x-a)<0$$

と変形できるから，この不等式の解は

$a<0$ のとき， $a<x<0$ 　(i)

$0<a$ のとき， $0<x<a$ 　(ii)

(i)のとき，不等式を満たす整数 x がちょうど１個だけ存在するのは，

解が $x=-1$ のみの場合である。このときの a の範囲は， $-2 \leqq a < -1$ である。

(ii)のとき，同様に問題の条件を満たす整数の解は $x=1$ のみである。

このときのaの範囲は，$1 < a \leqq 2$ である。

以上より，aの範囲は

$-2 \leqq a < -1$，$1 < a \leqq 2$

（７）正弦定理についての理解を問う。

BC=a，△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{a}{\sin\angle \mathrm{A}}=2R$$

だから，

$$R=\frac{5}{2\sin 30^\circ}=\frac{5}{2\times\frac{1}{2}}=5$$

（８）余弦定理についての理解を問う。

$AB = c = \sqrt{7}$， $BC = a$， $CA = b = 1$ として，余弦定理より，

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$$

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = a^2 + 1^2 - 2\cdot a\cdot 1\cdot\cos 60^\circ$$

これを整理すると，

$$a^2 - a - 6 = 0$$

これを解いて，

$$a = -2, 3$$

$a = -2$ は不適であるから，

$$a = BC = 3$$

（９） データの平均値と分散に関する理解を問う。

このデータの平均値は 8 より，

$$\frac{11+5+7+x+y}{5} = 8$$

これを整理すると，

$$x + y = 17 \qquad \text{(i)}$$

また，このデータの分散は 4.8 より，

$$\frac{(11-8)^2 + (5-8)^2 + (7-8)^2 + (x-8)^2 + (y-8)^2}{5} = 4.8$$

これを整理すると，

$$(x-8)^2 + (y-8)^2 = 5 \qquad \text{(ii)}$$

(i)より， $y = 17 - x$ なので，(ii)に代入して，

$$(x-8)^2 + (17-x-8)^2 = 5$$

これを整理して，

$$x^2 - 17x + 70 = 0 \quad (x-7)(x-10) = 0$$

$x < y$ より，

$$x = 7, y = 10$$

（１０）恒等式において，次数で整理し，係数を定めることができるかを問う。

$$a\left(x+2\right)^2+b(x+1)+c$$
$$=a\left(x^2+4x+4\right)+bx+b+c$$
$$=ax^2+4ax+4a+bx+b+c$$
$$=ax^2+(4a+b)x+4a+b+c$$

$x^2-x=ax^2+(4a+b)x+4a+b+c$ なので，

$$a=1,\ 4a+b=-1,\ 4a+b+c=0$$

これを解くと，

$$a=1,\ b=-5,\ c=1$$

（１１）多項式の割り算ができるかを問う。

商　$2x+2$

余り　$-13x+4$

（１２）２次方程式の解と係数の関係を理解しているかを問う。

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-3, \alpha\beta=4$$

したがって，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2\cdot 4=1$$

（１３）複素数を解にもつ方程式の係数を求めることの理解を問う。

２次方程式　$x^2+ax+b=0$ が $1-2i$ を解にもつので，

$$(1-2i)^2+a(1-2i)+b=0$$
$$(a+b-3)-(2a+4)i=0$$

a,b は実数より，

$$a+b-3=0, 2a+4=0$$

これを解くと，

$$a=-2, b=5$$

（１４）三角関数のグラフについての理解を問う。

$\cos\left(3\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos 3\left(\theta+\dfrac{\pi}{12}\right)$ であるので，$y=\cos\left(3\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，$y=\cos 3\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{12}$ だけ平行移動したものである。よって，a に当てはまる最大の負の数は $-\dfrac{\pi}{12}$。また，$y=\cos 3\theta$ の周期は，$y=\cos\theta$ の周期 2π の $\dfrac{1}{3}$ 倍で，$\dfrac{2}{3}\pi$ である。

（１５）加法定理についての理解を問う。

$$\sin 2\theta=\sqrt{3}\cos\theta$$
$$2\sin\theta\cos\theta=\sqrt{3}\cos\theta$$
$$2\cos\theta\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

したがって，$\cos\theta=0$，または，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，

$\cos\theta=0$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2}{3}\pi$

以上より，

$$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi,\frac{3}{2}\pi$$

（１６）指数関数についての理解を問う。

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{3}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}},\ 3=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{6}=(2\cdot 3)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}},\ \sqrt{6}=(2\cdot 3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$ より，

$$\sqrt[3]{6}<\sqrt{2}\sqrt[3]{3}<\sqrt{6}<3$$

以上より，小さい順に左から並べると，

$\sqrt[3]{6}$，$\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$，$\sqrt{6}$，3

（１７）常用対数についての理解を問う。

$$\log_{10} 15^{100} = 100\log_{10} 15 = 100\log_{10}(3\cdot 5) = 100(\log_{10} 3 + \log_{10} 5)$$

$\log_{10} 3 = 0.4771,\ \log_{10} 5 = 0.6990$ なので,

$$\log_{10} 15^{100} = 100(0.4771 + 0.6990) = 100\cdot 1.1761 = 117.61$$

したがって,

$$117 < \log_{10} 15^{100} < 118$$

よって,

$$10^{117} < 15^{100} < 10^{118}$$

以上より，15^{100} は 118 桁の整数である。

（１８）３次関数の導関数と３次関数のグラフの接線の理解を問う。

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ とし，$f(x)$ を微分すると,

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$$

したがって，接線の方程式は,

$$y - f(-1) = f'(-1)\{x - (-1)\}$$

$f(-1) = 0,\ f'(-1) = 3$ より,

$$y = 3x + 3$$

（１９）定積分を用いて曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めることができるかを問う。

$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$ を解くと,

$$x(x-2)(x-4) = 0$$

$$x = 0, 2, 4$$

したがって,

$$\begin{aligned}S &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 \\ &= 4 - (-4) \\ &= 8\end{aligned}$$

（２０）文字を含んだ定積分についての理解を問う。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(2x-a+1)^2dx &= \int_{-1}^{2}\left\{4x^2+4(-a+1)x+(-a+1)^2\right\}dx\\ &= \left[\frac{4}{3}x^3+2(-a+1)x^2+(-a+1)^2x\right]_{-1}^{2}\\ &= \left\{\frac{32}{3}+8(-a+1)+2(-a+1)^2\right\}-\left\{-\frac{4}{3}+2(-a+1)-(-a+1)^2\right\}\\ &= 12+6(-a+1)+3(-a+1)^2\\ &= 3a^2-12a+21\\ &= 3(a-2)^2+9\end{aligned}$$

したがって，この定積分は，$a=2$ のとき，最小値9 をとる。