問題【１】の解答と解説

解答

（１）　$179 = 2\times3^4 + 1\times3^2 + 2\times3 + 2 = 20122_{(3)}$

したがって，次のとおり。
$S(179) = 2+0+1+2+2 = 7$

（２）　x は３進数で５桁となる自然数なので，$10000_{(3)} \le x \le 22222_{(3)}$ である。

つまり $3^4 \le x < 3^5$ なので，X の要素の個数は $3^5 - 3^4 = 162$（個）

（３）　場合に分けて考える。最左の桁は１か２なので，

$1\{2,2,1,0\}$ の場合，${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 6\times2 = 12$

$1\{2,1,1,1\}$ の場合，${}_4C_1 = 4$

$2\{2,2,0,0\}$ の場合，${}_4C_2 = 6$

$2\{2,1,1,0\}$ の場合，${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 4\times3 = 12$

$2\{1,1,1,1\}$ の場合，${}_4C_4 = 1$

$\therefore 12+4+6+12+1 = 35$（通り）

出題意図

n 進法の概念を理解しているかどうかを問う基本問題である。（３）は正確に場合分けできるかどうかを問う。2023 年度お茶の水女子大学前期理学部（共通）入試問題を参考にした。

問題【2】の解答と解説

解答

1. $q(x) = x^2 - 4x + 7 = 0$ は，判別式が

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 16 - 28 = -12 < 0$$

であるので，異なる 2 つの虚数解を持つ。2 次方程式の解の公式を用いると，$q(x) = 0$ の解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} \\ &= 2 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

である。

2. $p(x)$ を $q(x)$ で割ると

$$\begin{array}{r@{}l} & x^3 + 6x - 7 \\ \cline{2-2} x^2 - 4x + 7 \big) & x^5 - 4x^4 + 13x^3 - 31x^2 + 70x - 49 \\ & -x^5 + 4x^4 - 7x^3 \\ \cline{2-2} & 6x^3 - 31x^2 + 70x \\ & -6x^3 + 24x^2 - 42x \\ \cline{2-2} & -7x^2 + 28x - 49 \\ & 7x^2 - 28x + 49 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

であるから，商は $x^3 + 6x - 7$，余りは 0 である。

3. $q(x)$ は $p(x)$ を割り切るので，(1) で求めた $2 \pm \sqrt{3}i$ は $p(x) = 0$ の解となる。従って残りの解は $x^3 + 6x - 7 = 0$ の解である。いま，

$$r(x) = x^3 + 6x - 7$$

としたとき，$r(1) = 1 + 6 - 7 = 0$ であるから，因数定理より $x - 1$ は

$r(x)$ を割り切る。$r(x)$ を $x-1$ で割ると，

$$
\begin{array}{r@{}r}
 & x^2 \quad + x + 7 \\
\cline{2-2}
x-1 \big) & x^3 \qquad\quad + 6x - 7 \\
 & -x^3 + x^2 \qquad\qquad\quad \\
\cline{2-2}
 & x^2 + 6x \qquad \\
 & -x^2 \ \ + x \qquad \\
\cline{2-2}
 & 7x - 7 \\
 & -7x + 7 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

であり，従って

$$s(x) = x^2 + x + 7$$

は $p(x)$ を割り切る。(1) と同様にして $s(x)=0$ を解くと，$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ を解として得る。

以上より，$p(x)$ の解は，

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ 1,\ 2 \pm \sqrt{3}i$$

の 5 つである（順不同）。

4. $p(x)=0$ の解のうち虚部が 0 以上のものは

$$2+\sqrt{3}i,\ 1,\ -\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

の 3 点であり，複素数平面上で図示すると図 1 の実線のようになる。

5. (4) で表した三角形の面積を求めればよい。この三角形を実軸に対して平行に -1 だけ移動させても三角形の面積は変化しないので，$-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ および $2+\sqrt{3}i$ を移動させた点をそれぞれ A，B と名付ければ，$\triangle$OAB の面積を求めればよい。ただし，O は原点である。

A $\left(-\frac{3}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}i\right)$，B $(1+\sqrt{3}i)$ であり，これらに対応する複素数をそれぞれ α, β とすれば，

$$\alpha = -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$\beta = 1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

であるから，OA $=3$，OB $=2$，$\angle$AOB $=\frac{\pi}{3}$ である。線分 OA，OB とその間の角度がわかったので，求める面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

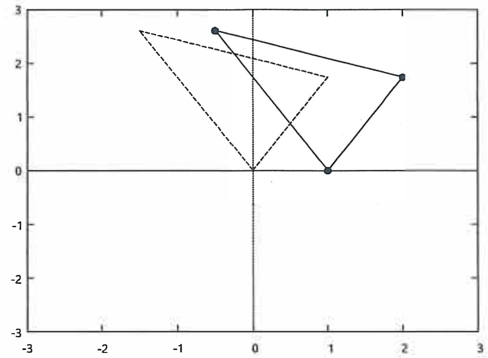

図 1: $p\,(x) = 0$ の解のうち虚部が 0 以上の解を直線で結んだもの（実線)。実軸方向に -1 だけ平行移動させた三角形（破線）は，実線の三角形と同じ面積をもつ。

出題意図

多項式と複素数について問う。2 次方程式を解くことができるか，多項式の除算ができるか，因数定理を利用して因数分解ができるかを問う。また，複素数の複素数平面上での表現がわかるか，三角形の面積を求めることができるかを問う。

解説

1. 2 次方程式の解に関する問題である（数学 II)。2 次方程式の解の種類の判別は判別式 $D = b^2 - 4ac$ を用いて調べることができる（数研出版『新編数学 II』p. 47，啓林館『数学 II』 p. 40)。2 次方程式は解の公式を用いて求めることができる（数研出版『新編数学 II』 p. 45，啓林館『数学 II』p. 39)。

2. 多項式の割り算に関する問題である（数学 II)。多項式の割り算を行う方法及び商・余りは数研出版『新編数学 II』 p. 16-17，啓林館『数学 II』p. 14-16 に解説がある。

3. 高次方程式とその解に関する問題である（数学 II)。ここでは 3 次方程式を解くことになるが，因数定理（数研出版『新編数学 II』 p. 57）を理解していることが重要である。この問題では方程式の形から比較的容易に $x = 1$ が解となることが確認できるので，(2) と同様に多項式の除算を行うことで，2 次方程式を得，(1) と同様にして目的の方程式の解を求めることができる。

4. 複素数平面（数学 C）と三角関数（数学 I）に関する問題である。複素数を座標平面上の点として幾何学的に表すことができれば，比較的容易に理解できる。求めるものが三角形の面積であり、原点を頂点の１つにするように平行移動ができれば，計算は非常に簡単になる。各複素数を極形式で表す（数研出版『新編数学 C』p. 78）ことができれば，問題は数学 I の内容に帰着する。三角形の面積は三角比を用いて計算できる場合がある。この問題の場合，２辺の長さとその間の角度がわかっているので，三角形の面積の計算式（数研出版『最新数学 I』p. 150）を用いることで求めることができる。
三角形の面積を求める問題であることから，他にも多数の回答が考えられる。正答の判定は最終的な値のみで判断する。

問題【3】の解答と解説

解答

(1) 数列に値を代入し計算すると，

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 27, \quad a_4 = 256$$

となる。

(2) （1）より $a_4 = 256 = 2^8$ であるから，$a_4^{30} = \left(2^8\right)^{30} = 2^{240}$ である。ここで $a_4^{30} = 2^{240}$ に対して常用対数を取ると，

$$\log 2^{240} = 240 \log_{10} 2 = 240 \times 0.3010 = 72.24$$

となる。$72 < \log 2^{240} < 73$ であるから，

$$10^{72} < 2^{240} < 10^{73}$$

を得る。従って，a_4^{30} は 73 桁の数である。

(3) a_1, a_2, a_3, a_4 のパターンから，$a_0 = 1$, $a_n = n^n$（$n \geq 1$）と予測できる。

(4) 証明にあたり，問題文の式は，n を $n+1$ で置き換えると

$$\sum_{i=0}^{n+1} {}_nC_i \,(n-i+1)^{n-i+1}\,(i-1)^{i-1} = -n^{n+1} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

となることに注意する。
$a_n = n^n$（$n \geq 1$）を帰納法で示す。$n = 0, 1$ のときは, (1) より成立している。ある自然数 m に対して $a_n = n^n$（$1 \leq n \leq m$）が成立していると仮定すると，

$$\begin{aligned}
a_{m+1} &= m a_m + \sum_{i=1}^{m+1} {}_{m+1}C_i \ a_{i-1} a_{m-i+1} \\
&= m \times m^m + \sum_{i=1}^{m+1} {}_{m+1}C_i \,(i-1)^{i-1}\,(m-i+1)^{m-i+1} \\
&= m^{m+1} + \sum_{i=0}^{m+1} {}_{m+1}C_i \,(i-1)^{i-1}\,(m-i+1)^{m-i+1} - (-1)^{-1}\,(m+1)^{m+1} \\
&= m^{m+1} + \left(-m^{m+1}\right) + (m+1)^{m+1} \\
&= (m+1)^{m+1}
\end{aligned}$$

となる。従って，帰納法より全ての自然数 n に対して $a_n = n^n$ が示された。

以上より，一般項は $a_0=1,\ a_n=n^n$（$n\geq 1$）。
（ただし，問題文で「$0^0=1$ としてよい」としているので，$a_n=n^n$（$n\geq 0$）も正答とする。）。

(5)　(3)，(4) より $a_n=n^n$（$n\geq 1$）であるから，2 以上の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}&=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}-\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\\
&=(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-(n-1)\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\\
&=(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-(n-1)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^n\\
&=(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-(n-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\\
&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[(n+1)-(n-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]\\
&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[(n+1)-(n-1)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n}\right]
\end{aligned}$$

と式変形できる。ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

と問題文の条件を用いると，極限は 2 つの収束先の積に収束する（即ち，$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ならば $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$）ので，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=e\cdot 1=e$$

となる。

用語の定義

- 数を一列に並べたものを**数列**という（数研出版『数学 B』 p. 8)。教科書では n は $1,2,3,\ldots$ とする場合のみ扱われているように見えるが，入試問題では例えば東京工業大学 2007 年度前期理系第 4 問，などに見られるように $n=0,1,2,\ldots$ とする場合も存在する。

- **ネイピア数** e は，

$$e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$$

の極限値として定義される（啓林館『数学 III』 p. 87，東京書籍『数学 III Advanced』 p. 81）。しかし，$s=\frac{1}{t}$（$t>0$）と置けば $(1+t)^{1/t}=\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$ であり，$t\to 0$ のとき $s\to\infty$ となるから，

$$e=\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$$

となることは容易にわかる。

出題意図

数列と極限について問う。漸化式から数列を計算できるか，e の定義を理解しているか，また，積に関する極限の性質を理解しているかを問う。

解説

数列とネイピア数 e に関する問題である。ここで定義される数列 $\{a_n\}$ は，$n\geq 1$ に関しては n^n と一致することが Riordan[4] によって示されている (OEIS: A000312, Gould [3])。この数列 $\{a_n\}$ に関し，Brothers と Knox は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=e$$

となることを示した [2]。

(1) 数列（数学 B，数学 III）の問題。解答の通り，漸化式に $n=1,2,3,4$ を代入して順に計算する。二項係数 ${}_nC_i$ の知識（数学 A, 数研出版『新編数学 A』 p. 30）も問われる。

(2) 常用対数の応用問題（数学 II）。教科書の例題程度の問題であり，例えば数研出版『数学 II』 p. 170 例題 7 のようにすれば容易に解くことが可能である。

(3) (4) 参照.

(4) 数列（数学 B，数学 III）の問題。証明する場合は数学的帰納法（数学 B）の知識を要する。問題文の等式は，例えば Gould[3] に見ることができる。ここで 0^0 の扱いであるが，分野によって様々な議論がある。代数学の分野などでは $0^0=1$ とする場合が多い一方，解析学では未定義とされる場合が多い。D.C. Benson は，'The choice whether to define 0^0 is based on convenience, not on correctness. ... The consensus is to use the definition $0^0=1$, although there are textbooks that refrain from defining 0^0' ([1] p. 29) と述べている。

(5) 数列の極限の問題（数学 III）。ネイピア数 e の定義と（用語の定義参照），2 つの収束列の積が収束先の積に収束すること（数研出版『数学 III』p. 30）がわかれば解くことができる。問題文の式とその極限は，$n \geq 1$ のときに $n = \frac{1}{m}$ と変数変換し，$m = 0$ の近傍でテイラー展開すれば

$$1 + \frac{m}{2} - \frac{m^2}{6} + \frac{m^3}{8} - \cdots$$

となるので，$m \to 0$ とすることで示される。

参考文献

[1] D.C. Benson. 'The moment of Proof'. Oxford University Press, 2000.

[2] H.J. Brothers, J.A. Knox. Math. Intelligencer 20(4), 1998, pp. 25–29.

[3] H.W. Gould. Ann. Math. Stat. 34(1), 1963, pp. 333–335.

[4] J. Riordan. Ann. Math. Stat. 33, 1962, pp. 178–185.